ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 22.11.2024

Новый материал (конспект в тетрадь)

Тема: «Признак возрастания (убывания) функции. Критические точки функции. Экстремумы»

Признак возрастания (убывания) функции

Интервалы возрастания и убывания называют интервалом **монотонности**.

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ **возрастает** на некотором интервале $(a; b)$, то её производная положительна $f'(x) > 0$.

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ **убывает** на некотором интервале $(a; b)$, то её производная отрицательна $f'(x) < 0$.

Чтобы найти интервалы возрастания и убывания функции, необходимо:

1. Найти нули функции и точки разрыва f ’(x).
2. Определить знак производной на интервалах, на которые полученные в п.1 точки делят область определения функции f (x).
3. Интервалы в которых $f'(x) > 0$, являются интервалами возрастания функции, а интервалы в которых $f'(x) < 0$, - интервалами убывания функции.

Пример: найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$$

Решение:

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 9x + 1)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 9 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 9$$

Приравняем производную к нулю:

$3x^2 + 6x - 9 = 0$

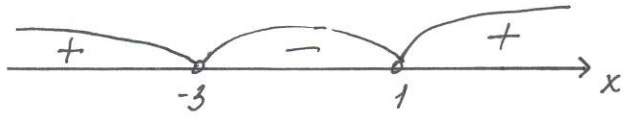
$x^2 + 2x - 3 = 0$

$Д = в^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16;$

$\sqrt{Д} = \sqrt{16} = 4$

$$x_1 = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1; x_2 = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Отметим полученные числа 1 и -3 на числовой прямой. Эти точки разобьют числовую прямую на интервалы.



Определим знак производной на каждом интервале. Для этого из каждого интервала возьмем число и подставим его производную

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9.$

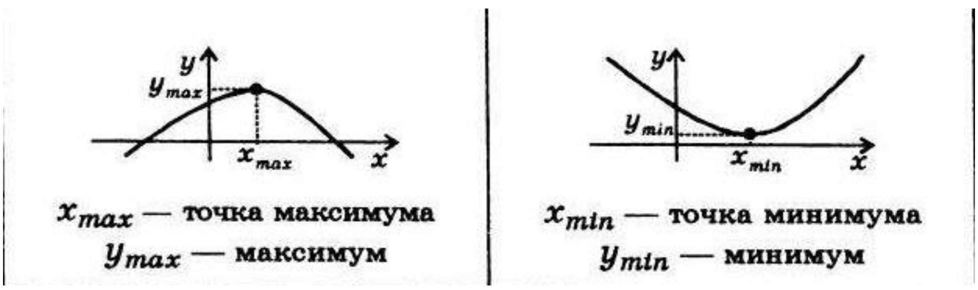
Возьмем из крайнего левого интервала число -4.
$f'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 9 = 3 \cdot 16 - 24 - 9 = 48 - 24 - 9 = 15 > 0$
получим число положительное, поэтому в интервале $(-\infty;-3)$ поставим знак +.
Аналогично определяем знак производной на двух других интервалах.

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 9 = 0 + 0 - 9 = -9 < 0$$
$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 9 = 3 \cdot 4 + 12 - 9 = 12 + 12 - 9 = 15 > 0$$

Ответ: функция возрастает на $(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$ убывает на (-3;1).

Критические точки функции, максимумы и минимумы

Критической точкой называют ту, в которой производная равна нулю или ее значения не существует. Она может одновременно являться точкой экстремума, но может ею и не быть.
<u>Теорема Ферма</u> (необходимое условие существования экстремума)
Если точка x_0 является точкой экстремума функции и в этой точке существует производная f, то она равна нулю, f $(x_0) = 0$.
Признак максимума функции: если при переходе через точку x_0 изменяется знак производной с «+» на «-», то в данной точке функция достигает своего максимума.
Признак минимума функции: если при переходе через точку x_0 изменяется знак производной с «-» на «+», то в данной точке функция достигает своего минимума



<u>Определение.</u> Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума.**

$\left.\begin{matrix} x_{\max} \\ x\min \end{matrix}\right\} \textit{экстремумы}$

Чтобы найти экстремумы функции, необходимо:

1. Найти нули и точки разрыва f ’(x);
2. Определить методом проб знак f ’(x) в интервалах, на которые полученные в п.1 точки делят область определения функции f (x);
3. Из этих точек выделить те, в которых функция f(x) определена и по разные стороны от каждой из которых производная f ’(x) имеет разные знаки – это и есть точки экстремума; при этом является точкой максимума если в этой точке происходит смена знака с « + » на « - », и точкой минимума – с « - » на « + ».

Пример: найти критические точки функции $f(x) = 5 + 12x - x^3$. Определить, какие из них являются точками максимума, а какие минимума.

<u>Решение:</u>

$f(x) = 5 + 12x - x^3$

$f'(x) = (5 + 12x - x^3)' = 0 + 12 \cdot 1 - 3x^2 = 12 - 3x^2$;

$12 - 3x^2 = 0 \div 3$

$4 - x^2 = 0$

по формуле $a^2 - в^2 = (a - в) \cdot (a + в)$ получим:

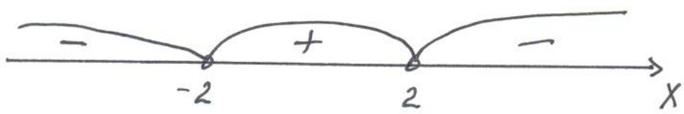
$2^2 - x^2 = 0$

$(2 - x) \cdot (2 + x) = 0$

$2 - x = 0$ или $2 + x = 0$

$-x = -2$ $\quad x = -2$

$x = 2$



Получим две критические точки 2 и -2.

Определим знак производной $f'(x) = 12 - 3x^2$ на каждом из интервалов.

$f'(-3) = 12 - 3 \cdot (-3)^2 = 12 - 3 \cdot 9 = 12 - 27 = -15 < 0$

$f'(0) = 12 - 3 \cdot 0^2 = 12 > 0$

$f'(3) = 12 - 3 \cdot 3^2 = 12 - 3 \cdot 9 = 12 - 27 = -15 < 0$

Ответ: $x_{min} = -2$; $x_{max} = 2$.

Домашнее задание: проработать конспект и выполнить задания в рабочей тетради **(Интернет-решения мне не нужны!!!)**

1. Найдите промежутки возрастания и убывания и постройте графики функций

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$; б) $f(x) = 4x^3 - 1{,}5x^4$;

в) $f(x) = 2 + 9x + 3x^2 - x^3$; г) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

2. Найдите критические точки функции. Определите, какие из них являются точками максимума, а какие – точками минимума:

а) $f(x) = 5 + 12x - x^3$;   б) $f(x) = 9 + 8x^2 - x^4$;

в) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$;   г) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2$.

Конспект и задания отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru