ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ
по дисциплине «Математика»

дата 05.11.2024

Тема: «Первообразная функция и неопределённый интеграл. Вычисление неопределённого интеграла»

1. Новый материал (конспект в рабочую тетрадь)

Первообразная функция

<u>Определение:</u> Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Неопределенный интеграл

<u>Определение:</u> **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

<u>Таблица основных интегралов</u>

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов.

	Интеграл	Значение		Интеграл	Значение
1	$\int tgxdx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgxdx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	10	$\int \cos xdx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin xdx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$tgx + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-ctgx + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$

<u>Основные методы интегрирования</u>

Метод непосредственного интегрирования

Определение. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интегрирования приводится к одному или нескольким табличным интегралом, называется непосредственном интегрированием.

Примеры:

1) $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + c$

2) $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = -\frac{x^{-3}}{3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$

3) $\int (2x^5 - 3x^2) dx = \int 2x^5 dx - \int 3x^2 dx = \frac{x^6}{3} - x^3 + c$

4) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{3}{x^2} dx = 2\int \frac{dx}{x} + 3\int x^{-2} dx = 2\ln x - \frac{3}{x} + c$

5) $\int (3x^3 + 2x - 1) dx = 3\int x^3 dx + 2\int x dx - \int dx = \frac{3x^4}{4} + x^2 - x + c$

6) $\int (3cosx - 4sinx) dx = 3\int \cos x dx - 4\int \sin x dx = 3\sin x + 4\cos x + c$

7) $\int (e^x - 2cosx) dx = \int e^x dx - 2\int \cos x dx = e^x - 2\sin x + c$

Метод интегрирования подстановкой

Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t)$ и получают

$$\int f(x) dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{matrix} \right| = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt .$$

Примеры:

1) $\int cos\, 3\,xdx = \left| \begin{matrix} 3x = t \\ (3x)' dx = dt \end{matrix} ; \begin{matrix} 3dx = dt \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{matrix} \right| = \int cos\, t \cdot \frac{1}{3} sin\, t = \frac{1}{3} sin\, 3\,x + C$

2) $\int sin(\,7x + 8) dx = \left| \begin{matrix} 7x + 8 = t \\ 7dx = dt \end{matrix} ; dx = \frac{1}{7} dt \right| = \int sin\, t \cdot \frac{1}{7} dt \Big| = -\frac{1}{7} cos\, t + C = -\frac{1}{7} cos(\,7x + 8) + C$

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} 1 - x^2 = t \\ -2xdx = dt \end{matrix} ; dx = -\frac{dt}{2x} dt \right| = -\int \frac{\cancel{x} dt}{\sqrt{t} \cdot 2\cancel{x}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C == -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1 - x^2} + C$

4) $\int (15-3x)^7 dx = \left| \begin{matrix} 15-3x=t \\ -3dx = dt \end{matrix} ; dx = -\frac{1}{3}dt \right| = \int t^7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) dt = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + c = -\frac{(15-3x)^8}{24} + C$

Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Примеры:

1) $\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$

2) $\int (2x+1) e^{3x} dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| =$

$= (2x+1) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} 2xdx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + c$

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru