Урок №47 **Л-240911** **14.11.2024**

Тема: Системы тригонометрических уравнений

СРОК СДАЧИ РАБОТЫ: 15.11.2024

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Основными методами решения систем уравнений являются:

- метод подстановки

- метод замены переменной.

Также при решении систем тригонометрических уравнений используются многие тригонометрические формулы.

Рассмотрим решение систем тригонометрических уравнений.

Пример 1.

$$\begin{cases} sinxcosy = 0{,}25\sqrt{3} \\ cos\,cos\,(x+y)\ \ cos\,cos\,(x-y)\ = 0{,}5 \end{cases}$$

Решение:

При решении этой системы можно действовать по-разному:

1) можно использовать формулы преобразования произведения в сумму синусов (в первом уравнении) или косинусов (во втором уравнении)

2) можно использовать формулами косинуса суммы и разности во втором уравнении.

Воспользуемся формулой преобразования произведения косинусов в сумму косинусов:

$$\begin{cases} sinxcosy = 0{,}25\sqrt{3} \\ cos\,cos\,2x\ + cos\,cos\,2y\ = 1 \end{cases}.$$

Теперь, учитывая, что косинус двойного аргумента может быть выражен через квадрат синуса и косинуса аргумента, возведем в квадрат первое уравнение. Но, так как возведение в квадрат не является равносильным преобразованием, введем ограничение:

$sinxcosy > 0$, то есть $sinx$ и $cosy$ должны быть одного знака.

$$\begin{cases} sin^2xcos^2y = \frac{3}{16} \\ 1 - 2sin^2x + 2cos^2y - 1 = 1 \end{cases}.$$

Теперь введем новые переменные:

$\begin{cases} a = sin^2x \\ b = cos^2y \end{cases}$, $a > 0, b > 0$(*) и решим вспомогательную систему:

$$\begin{cases} ab = \frac{3}{16} \\ -2a + 2b = 1 \end{cases}.$$

Решим ее методом подстановки.

$$\begin{cases} b = a + \frac{1}{2} \\ a\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16} \quad (**) \end{cases}.$$

Решим уравнение (**).

$$a\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}$$

$$16a^2 + 8a - 3 = 0$$

$$\left[a = \frac{1}{4} \quad a = -\frac{3}{4} \text{ не удовлетворяет } (**)\right.$$.

$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$. Вернемся к исходным переменным.

$$\begin{cases} sin^2x = \frac{1}{4} \\ cos^2y = \frac{3}{4} \end{cases},$$

$$\begin{cases} sinx = \pm\frac{1}{2} \\ cosy = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

С учетом условия $sinx cosy > 0$ получим две системы:

$$\begin{cases} sinx = \frac{1}{2} \\ cosy = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} sinx = -\frac{1}{2} \\ cosy = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\begin{cases} x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n \\ y = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$ $, n, k \in Z$ или

$$\begin{cases} x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n \\ \quad y = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, n, k \in Z$$

Ответ: $\begin{cases} x = (-1)^{n}\dfrac{\pi}{6} + \pi n \\ \quad y = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, n, k \in Z$

Или $\begin{cases} x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n \\ \quad y = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, n, k \in Z$

Пример 2.

$$\begin{cases} sinx - siny = \dfrac{1}{sinx} \\ cosx - cosy = \dfrac{1}{cosx} \end{cases}$$

Решение:

С учетом области определения уравнений $(sinxcosx \neq 0)$ преобразуем каждое уравнение:

$$\begin{cases} sin^2x - sinysinx = 1 \\ cos^2x - cosycosx = 1 \end{cases}.$$

Теперь сложим эти уравнение, оставив в системе, например, первое уравнение:

$$\begin{cases} sin^2x - sinysinx = 1 \\ cos^2x + sin^2x - cosycosx - sinysinx = 2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} sin^2x - sinysinx = 1 \\ cos(y - x) = -1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} sin^2x - sinysinx = 1 \\ y - x = \pi + 2\pi k, \end{cases}. k \in Z$$

Теперь выразим из второго уравнения y:

$$\begin{cases} sin^2x - sinysinx = 1 \\ y = x + \pi + 2\pi k \end{cases}, k \in Z,$$

$$\begin{cases} sin^2x - sin(x + \pi + 2\pi k)sinx = 1 \\ y = x + \pi + 2\pi k \end{cases}, k \in Z,$$

$$\begin{cases} sin^2x - sin(x + \pi)sinx = 1 \\ y = x + \pi + 2\pi k \end{cases}, k \in Z,$$

$$\begin{cases} 2\sin^2 x = 1 \\ y = x + \pi + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$,

$$\begin{cases} \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = x + \pi + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$,

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \\ y = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$,

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \\ y = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n + 4k) \end{cases}, \quad k, n \in Z$$.

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \\ y = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n + 4k) \end{cases}, \quad k, n \in Z$.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1.

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$$

Решение:

Введем новые переменные: $\begin{cases} \cos x = a \\ \sin y = b \end{cases}$.

Тогда вспомогательная система будет иметь вид:

$$\begin{cases} 4b - 6\sqrt{2}a = 5 + 4(1 - b^2) \\ 2a^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 4b^2 + 4b - 6\sqrt{2}a - 9 = 0 \\ 2a^2 - 1 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 4b^2 + 4b \mp 6 - 9 = 0 \\ a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ или

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4b^2 + 4b - 3 = 0 \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 4b^2 + 4b - 15 = 0 \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{array} \right.$$.

Получаем четыре пары решений для вспомогательной системы:

$\begin{cases} b = 0{,}5 \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} b = -1{,}5 \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} b = 2{,}5 \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} b = 1{,}5 \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Так как $\begin{cases} a = cosx \\ b = siny \end{cases}$, то решение имеет только первая система: $\begin{cases} cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ siny = 0{,}5 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ y = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases}, k, n \in Z.$$

<u>Пример 2.</u>

Решите систему уравнений: $\begin{cases} sinx + y = 5 \\ 4y + 2sinx = 19 \end{cases}$.

<u>Решение:</u>

Пусть $sinx = t$.

Система примет вид: $\begin{cases} t + y = 5 \\ 4y + 2t = 19 \end{cases}$, то есть мы получили простую линейную систему.

Ее можно решить методом подстановки или методом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} t = 5 - y \\ 4y + 2(5 - y) = 19 \end{cases},$$

$$\begin{cases} t = 5 - y \\ 2y = 9 \end{cases},$$

$$\begin{cases} t = 0{,}5 \\ y = 4{,}5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} sinx = 0{,}5 \\ y = 4{,}5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z \\ y = 4{,}5 \end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z \\ y = 4{,}5 \end{cases}$.

Домашнее задание №175, а)