

Тема: Решение тригонометрических уравнений основных типов: простейшие тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным, решаемые разложением на множители, однородные

СРОК СДАЧИ РАБОТ ДО 14.11.2024

1. Изучение нового материала.

1 способ. Решение уравнений разложением на множители

$$\sin 4x = 3 \cos 2x$$

Для решения уравнения воспользуемся формулой синуса двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - 3 \cos 2x = 0,$$

$$\cos 2x (2 \sin 2x - 3) = 0.$$

Произведение этих множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей будет равен нулю.

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{или}$$

$$\sin 2x = 1,5 - \text{нет решений, т.к. } |\sin \alpha| \leq 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2 способ. Решение уравнений преобразованием суммы или разности тригонометрических функций в произведение

$$\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0.$$

Для решения уравнения воспользуемся формулой

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos 3x + 2 \sin \frac{2x - 4x}{2} \cos \frac{2x + 4x}{2} = 0,$$

$$\cos 3x - 2 \sin x \cos 3x = 0,$$

$$\cos 3x (1 - 2 \sin x) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} \cos 3x = 0; \\ 1 - 2 \sin x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2 \sin x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

Множество решений второго уравнения полностью входит во множество решений первого уравнения.

Значит $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}.$

3 способ. Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x.$$

Для решения уравнения воспользуемся формулой

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta))$$

$$\frac{1}{2} (\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2} (\sin 8x + \sin 4x),$$

$$\sin 8x + \sin 2x - \sin 8x - \sin 4x = 0,$$

$$\sin 2x - \sin 4x = 0,$$

$$2 \sin (-x) \cos 3x = 0,$$

$$\sin x \cos 3x = 0,$$

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos 3x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\pi k, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}$

4 способ. Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

$$3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0,$$

$$3 \sin x - 2 (1 - \sin^2 x) = 0,$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0,$$

Пусть $\sin x = t$, где $|t| \leq 1$.

Получим квадратное уравнение $2t^2 + 3t - 2 = 0$,

$$D = 9 + 16 = 25.$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}.$$

$$t_1 = -2;$$

$$t_2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом

$t_1 = -2$ не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$.

Значит $\sin x = \frac{1}{2}$.

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Поэтому

$$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

Домашнее задание

Решить уравнения:

1. № 164 (а) (квадратное уравнение)

2. № 168 (а) (разложение на множители)

3. № 174 (а) (преобразование суммы в произведение)

4. $\sin 3x \cos x = \sin \frac{5}{2}x \cos \frac{3}{2}x$ (преобразование произведения в сумму)