Математика Л-240911 **11.11.2024**

Урок №45

Тема: Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств

Оформление работы:

ФИО, группа

Дата, тема

Страницы пронумеровать.

Высылать фото в одном формате и расположении.

Фото должно быть читаемо и аккуратно написано.

Небрежно оформленная работа проверяться не будет!

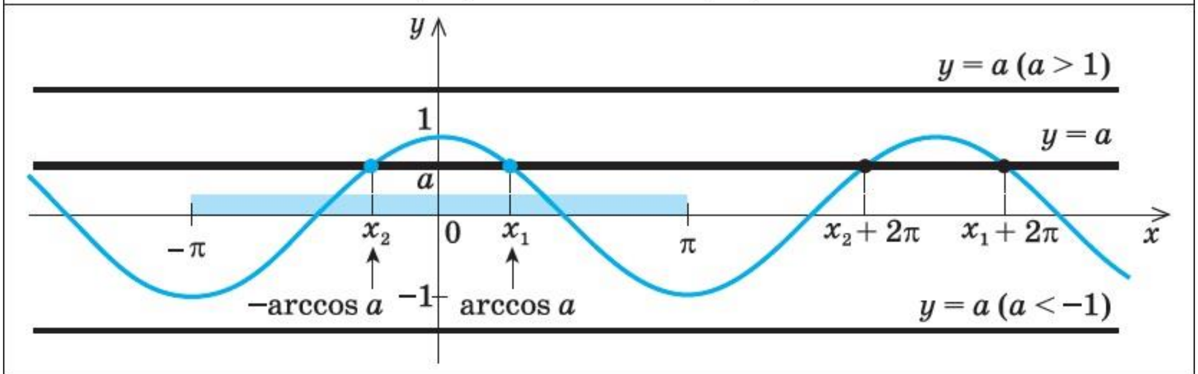
Срок сдачи работ до 12.11.2024

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

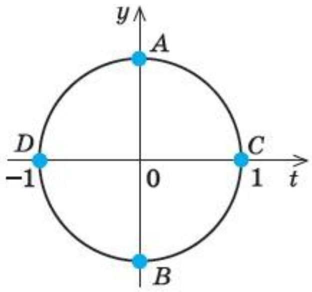
Уравнение cos x = a

1. Графическая иллюстрация и решение уравнения $\cos x = a$

Графическая иллюстрация



Решения	Примеры
$\boxed{\cos x = a}$ $\lvert a\rvert > 1$: $\boxed{\text{Корней нет}}$ $\lvert a\rvert \leqslant 1$: $\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$	1. ▶ $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. ◁ 2. ▶ $\cos x = \sqrt{3}$. Корней нет, поскольку $\sqrt{3} > 1$. ◁

2. Частные случаи решения уравнения $\cos x = a$	
	$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ $\cos x = 1 \quad x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ $\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение

▶ $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Комментарий

Поскольку $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, то данное уравнение вида $\cos x = a$ имеет корни, которые можно найти по формуле (1).

Для вычисления $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ можно воспользоваться формулой:

$$\mathbf{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}.$$

Тогда

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Задача 2 Решите уравнение $\cos x = \sqrt{2}$.

Решение

▶ Поскольку $\left|\sqrt{2}\right| > 1$, то корней нет.

Ответ: корней нет. ◁

Комментарий

Поскольку $\left|\sqrt{2}\right| > 1$, то данное уравнение не имеет корней (то есть формулу (1) нельзя применить).

Задача 3 Решите уравнение $\cos 4x = \frac{1}{3}$.

Решение

▶ $4x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$

$$x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ:

$$\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\quad n \in \boldsymbol{Z}.\ \triangleleft$$

Комментарий

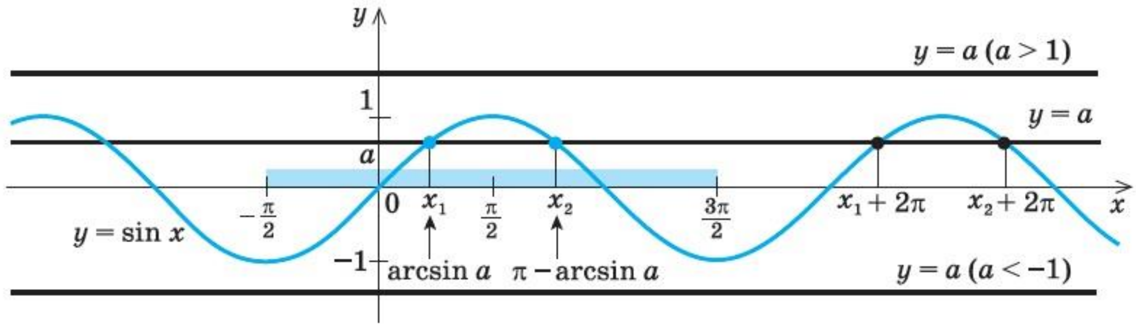
Поскольку $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, то можно воспользоваться формулой (1).

Учитывая, что $\arccos\frac{1}{3}$ не является табличным значением, для получения ответа достаточно после нахождения $4x$ по формуле (1) обе части последнего уравнения разделить на 4.

Уравнение sin x = a

1. Графическая иллюстрация и решение уравнения $\sin x = a$

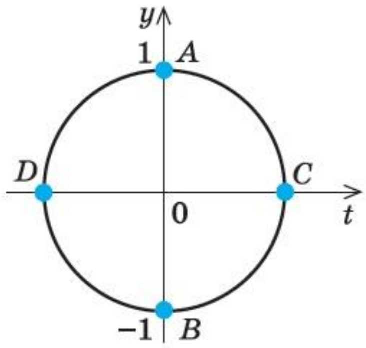
Графическая иллюстрация



A

Решения	Примеры
$\boxed{\sin x = a}$ $\lvert a\rvert > 1$: $\boxed{\text{Корней нет}}$ $\lvert a\rvert \leqslant 1$: $\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}}$	1. ▶ $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁ 2. ▶ $\sin x = \sqrt{3}$. Корней нет, так как $\sqrt{3} > 1$. ◁

2. Частные случаи решения уравнения $\sin x = a$



$\sin x = 0 \quad x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

$\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение

▶ $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $(-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Комментарий

Поскольку $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$, то данное уравнение вида $\sin x = a$ имеет корни, которые можно найти по формуле (3).

Для вычисления $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ можно воспользоваться формулой:

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Тогда

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$

Замечание. Ответ к задаче 1 часто записывают в виде $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, но такая запись не является обязательной.

Задача 2 Решите уравнение $\sin x = \frac{\pi}{2}$.

Решение

▶ Поскольку $\left|\frac{\pi}{2}\right| > 1$, то корней нет.

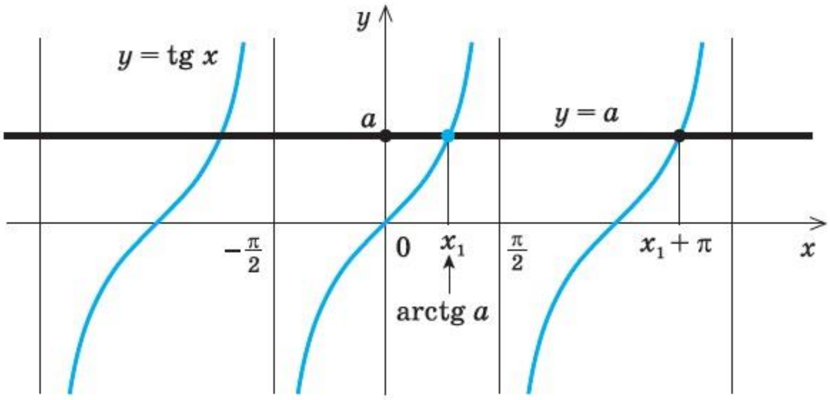
Ответ: корней нет. ◁

Комментарий

Поскольку $\left|\frac{\pi}{2}\right| > 1$, то данное уравнение не имеет корней (то есть формулой (3) нельзя воспользоваться).

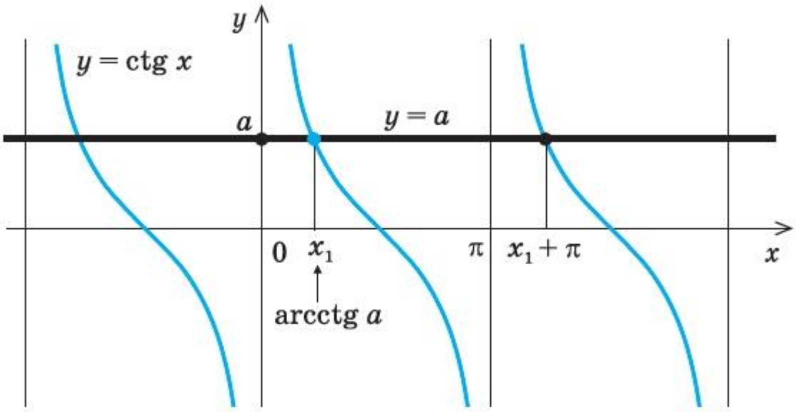
Уравнение tg x = a и ctg x = a

1. Графическая иллюстрация и решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$



Формула	Пример
$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{tg} x = a \\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$ Частный случай $\boxed{\begin{gathered}\operatorname{tg} x = 0 \\ x = \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$	$\operatorname{tg} x = 1$ ▶ $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in Z.$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$ ◁

2. Графическая иллюстрация и решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$



Формула	Пример
$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{ctg} x = a \\ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$ Частный случай $\boxed{\begin{gathered}\operatorname{ctg} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$	$\operatorname{ctg} x = 7$ ▶ $x = \operatorname{arcctg} 7 + \pi n,\ n \in Z.$ ◁

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Решение

$x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Комментарий

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любом значении a, поэтому всегда можно воспользоваться формулой (1):

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Для нахождения $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ можно применить формулу

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$. Тогда

$$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Задача 2 Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Решение

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Комментарий

Сначала по формуле (1) найдем значение выражения $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$, а потом из полученного линейного уравнения найдем значение переменной x.

Задача 3 Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = 5$.

Решение

$x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $\operatorname{arcctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Комментарий

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет корни при любом значении a, поэтому всегда можно воспользоваться формулой (2):

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Учитывая, что $\operatorname{arcctg} 5$ не является табличным значением (см. табл. 19, приведенную на с. 156), полученная формула дает окончательный ответ.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

Разобрать и записать решения задач в тетрадь (8 примеров)