Лекция. Системы счисления

План лекции:

1. **Выписать определения**
2. **Рассмотреть правила перевод из одной сс в другую**

Основные понятия систем счисления

Для записей результатов количественных (числовых) измерений используются числа. ***Число*** **–** это основное понятие математики, используемое для количественной характеристики, сравнения и нумерации объектов. Письменными знаками (символами) для записи чисел служат ***цифры.*** Самыми распространёнными цифрами являются арабские цифры, представляемые знаками от нуля (0) до девяти (9); менее распространены римские цифры. Обычно количество цифр (символов) для записи чисел ограничено, поэтому для больших чисел цифры в его записи будут повторяться. Конечный набор (множество) цифр (символов) называется ***алфавитом.*** Совокупность приемов и правил изображения чисел цифровыми знаками называется ***системой счисления.***

Система счисления должна обеспечивать:

– возможность представления любого числа в заданном диапазоне;

– однозначность, сжатость записи числа и простоту выполнения арифметических операций;

– достижение высокого быстродействия машины в процессе обработки информации.

Количество цифр, необходимых для записи числа в системе, называют ***основанием системы счисления.***

Основание системы счисления также определяет, во сколько раз различаются значения одинаковых цифр в соседних позициях числа. Основание системы счисления записывается справа от числа в нижнем индексе: 5_{10}; 111010_2; $AF17C_{16}$ и т.д. Запись числа в некоторой системе счисления называется его ***кодом.***

Все системы счисления можно разделить на 3 вида:

- позиционные системы счисления;
- непозиционные системы счисления;
- смешанные системы счисления.

Позиционные системы счисления

Позиционная система счисления – это система счисления, в которой значение символа зависит от его позиции в ряду цифр, изображающих число, т.е. количественное значение цифры зависит от того, какую позицию в числе она занимает. Классическим примером позиционной системы счисления является десятичная система счисления.

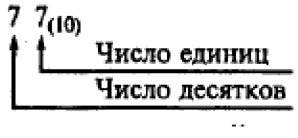


Рисунок 1.1 – Число позиционной системы счисления

Позиционную систему счисления с основанием Р принято называть Р-ичной. Основание позиционной системы счисления показывает, сколько чисел в алфавите системы счисления, а также определяет, во сколько раз различаются значения одинаковых цифр в соседних позициях числа.

Позиционные системы счисления более удобны для вычислительных операций, поэтому они получили наибольшее распространение.

Примерами позиционной системы счисления также могут служить двоичная, троичная, восьмеричная, шестнадцатеричная и т.д.

Непозиционные системы счисления

Непозиционная система счисления – это система счисления, в которой значение символа не зависит от его положения в числе.

Примером непозиционной системы счисления является унарная (единичная) система счисления. Основное ее применение – обучение детей счету. В ее алфавит входит единственная цифра – 1, а количество единиц соответствует количеству объектов. Так, число 111 в унарной системе счисления обозначает число 3 в десятичной. В числе 111 встречаются три цифры 1, и каждая из них обозначает одну величину – число «один».

Еще одним классическим примером непозиционной системы счисления является римская система счисления, в которой для записи чисел используются буквы латинского алфавита: I – 1,V – 5, X – 10, L – 50, C – 100, D – 500, M – 1000.

Рисунок 1.2 – Число непозиционной системы счисления

При записи чисел в римской системе счисления число составляется по следующим правилам:

1. если меньшая цифра стоит слева от большей, то меньшая цифра вычитается из большей;
2. если меньшая цифра стоит справа от большей, то обе цифры складываются. Одинаковые цифры так же складываются.

Примеры:

IX = 9.

MMXI = 1000 + 1000 +10 + 1 = 2011.

MCMXCVIII = 1000 +(-100 + 1000) + (-10 + 100) + 5 + 1 + 1 + 1 = 1999.

Очевидным недостатком непозиционных систем счисления является трудность записи больших чисел, они слишком длинные и при их записи легко допустить ошибку. Для простоты обозначения больших чисел постоянно вводились новые цифры. Кроме того, в непозиционных системах счисления трудно совершать арифметические операции, т.к. не существует четких алгоритмов их вычисления. Также следует учитывать, что запись дробных и отрицательных чисел невозможна.

Смешанные системы счисления

Смешанная система счисления – это система счисления, количество символов алфавита которой может меняться в зависимости от разряда числа. Классическим примером смешанных систем счисления является система измерения времени или денежные знаки.

В настоящее время в России используются монеты и купюры следующих номиналов: 1 коп., 5 коп., 10 коп.,50 коп., 1 руб., 2 руб., 5 руб., 10 руб., 50 руб., 100 руб., 500 руб., 1000 руб. и 5000 руб. Чтобы получить некоторую сумму в рублях, нужно использовать некоторое количество денежных знаков различного достоинства. Предположим, что необходимо купить товары на сумму 6379 руб. Чтобы расплатиться, потребуется шесть купюр по 1000 рублей, три купюры по 100 рублей, одна купюра 50 рублей, две купюры по 10 рублей, одна монета достоинством 5 рублей и две монеты по 2 рубля. Если записать количество купюр или монет начиная с 1000 руб. и заканчивая 1 коп., заменяя нулями пропущенные номиналы, то получим число, представленное в смешанной системе счисления – 603121200000.

Системы счисления, используемые в вычислительной технике

Наибольшее распространение получили такие позиционные системы счисления как десятичная, двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная и двоично-десятичная.

Десятичная система счисления **–** позиционная система счисления по целочисленному основанию 10. Десятичная система счисления характеризуется тем, что базисом этой системы являются последовательные степени числа 10. Другими словами, 10 единиц каждого разряда образуют единицу следующего старшего разряда.

Для записи любых действительных чисел достаточно иметь только десять различных цифр – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, а также символы «+» и «-» для обозначения знака числа и запятую или точку для разделения целой и дробной частей числа.

Двоичная система счисления **–** позиционная система счисления с основанием 2. В этой системе счисления числа записываются с помощью двух символов (0 и 1), которые также называют битами. Выбор двоичной системы для применения в вычислительной технике объясняется тем, что электронные элементы – триггеры, из которых состоят микросхемы ЭВМ, могут находиться только в двух рабочих состояниях.

Двоичная система удобна для компьютера, но неудобна для человека: числа получаются длинными и их трудно записывать и запоминать. Поэтому применяются системы счисления, родственные двоичной – ***восьмеричная*** и ***шестнадцатеричная.*** Для записи чисел в восьмеричной системе счисления используют цифры 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7; а в 16-теричной 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, C, D, E, F.

Двоично-десятичный код (BCD, 8421-BCD) – форма записи целых чисел, при которой каждый десятичный разряд числа записывается в виде его четырехбитного двоичного кода (тетрады). Например, десятичное число 311_{10}

будет записано в двоичной системе счисления в двоичном коде как 100110111_2, а в двоично-десятичном коде как $0011\ 0001\ 0001_{BCD}$.

Во всех системах счисления, кроме десятичной, знаки читаются по одному. Например, число 101_2 произносится «один ноль один».

Таблица 1.1 – Соответствие чисел, записанных в различных системах счисления

Десятичная	**Римская**	**Двоичная**	**Восьмеричная**	**Шестнадцатеричная**	**Десятичная**	**Римская**	**Двоичная**	**Восьмеричная**	**Шестнадцатеричная**
0		0000	0	0	**8**	VIII	1000	10	8
1	I	0001	1	1	**9**	IX	1001	11	9
2	II	0010	2	2	**10**	X	1010	12	A
3	III	0011	3	3	**11**	XI	1011	13	B
4	IV	0100	4	4	**12**	XII	1100	14	C
5	V	0101	5	5	**13**	XIII	1101	15	D
6	VI	0110	6	6	**14**	XIV	1110	16	E
7	VII	0111	7	7	**15**	XV	1111	17	F

Представление чисел в Р-ичных системах счисления

Р-ичной системой счисления принято называть однородную позиционную систему счисления с основанием *Р*. ***Однородная система счисления*** – это позиционная система счисления с одинаковым основанием в каждом разряде. Поскольку на значение *Р* нет никаких ограничений, то теоретически возможно бесконечное множество позиционных систем счисления.

Разрядом называется позиция цифры в числе. В *Р*-ичной системе счисления единицами разрядов служат последовательные степени числа *Р*, иначе говоря, *Р* единиц какого-либо разряда образуют единицу следующего старшего разряда. Для целых чисел разряды нумеруются справа налево, началом отсчета является 0. Например, для числа 5710049_{10} разряды нумеруются следующим образом:

Цифра	5	7	1	0	0	4	9
Разряд	6	5	4	3	2	1	0

Счет разряда дробной части ведется слева направо, начиная от запятой. Например, для числа $0{,}84239_{10}$ разряды нумеруются следующим образом:

Цифра	8	4	2	3	9
Разряд	–1	–2	–3	–4	–5

Любое число в Р-ичной системе счисления можно записать в виде последовательного перечисления его цифр, начиная со старшей, при этом целая часть от дробной отделяется запятой:

$$X_P = A_n A_{n-1} \ldots A_i A_0, B_{-1} B_{-2} \ldots B_{-k} \qquad (1.1)$$

где *Р* – основание системы счисления;

A_n, B_k – цифры числа, записанного в данной системе счисления;

n – количество разрядов целой части числа;

k – количество разрядов дробной части числа.

Представление числа в Р-ичной системе счисления в таком виде называется ***свернутой формой записи числа.*** Эта форма используется при изображении чисел в позиционных системах счисления.

При решении задач чаще всего пользуются ***развернутой формой записи числа,*** которую можно записать в общем виде следующим образом:

$$X_P = A_n \cdot P^{n-1} + A_{n-1} \cdot P^{n-2} + \ldots + A_2 \cdot P^1 + A_1 \cdot P^0 + B_{-1} \cdot P^{-1} + B_{-2} \cdot P^{-2} + \ldots + B_{-k} \cdot P^{-k} \quad (1.2)$$

где P – основание системы счисления;

A_n, B_k – цифры числа, записанного в данной системе счисления;

n – количество разрядов целой части числа;

k – количество разрядов дробной части числа.

Пример. Число $6293{,}185_{10}$ запишется в форме многочлена следующим образом:

$$6293{,}185_{10}=6 \cdot 10^3+2 \cdot 10^2+9 \cdot 10^1 +3 \cdot 10^0+1 \cdot 10^{-1}+8 \cdot 10^{-2}+5 \cdot 10^{-3}$$

Таким образом, Р-ичная система счисления позволяет с помощью заранее ограниченного набора цифр записать как сколь угодно большое, так и сколь угодно малое число в виде суммы положительных и отрицательных степеней числа P и при этом единственным образом.

Правила перевода из одной системы счисления в другую

Перевод чисел из одной системы счисления в другую составляет важную часть машинной арифметики. Рассмотрим основные правила перевода.

Правило № 1. Перевод чисел из P-ичной системы счисления в десятичную.

Для перевода P-ичного числа в десятичную систему счисления необходимо использовать следующий алгоритм:

1. число в P-ичной системе счисления необходимо записать в развернутой форме, т.е. в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа P;
2. найти значение полученного выражения по правилам десятичной арифметики.

Примеры:

$101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5_{10}$

$347{,}4_8 = 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 4 \cdot 8^{-1} = 231{,}5_{10}$

$3A{,}B7_{16} = 3 \cdot 16^1 +10 \cdot 16^0 + 11 \cdot 16^{-1} +7 \cdot 16^{-2}= 58{,}71484375_{10}$.

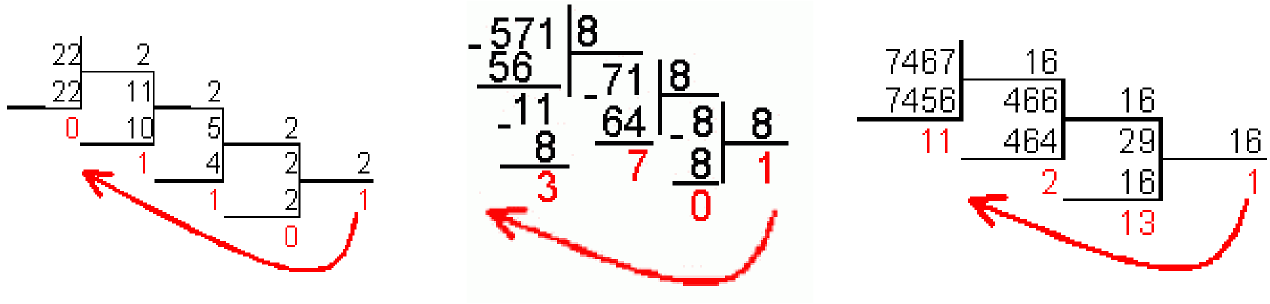
Правило № 2. Перевод целых чисел десятичной системы счисления в P-ичную.

Для перевода целого числа из десятичной системы счисления в P-ичную необходимо:

1. десятичное число последовательно делить на основание новой системы счисления (P) до тех пор, пока не останется остаток меньший числа P;
2. число в P-ичной системе счисления записать как последовательность последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке, используя алфавит новой системы счисления.

Примеры:

$22_{10}=10110_2$; $571_{10}=1073_2$; $7467_{10}=1D2B_2$;



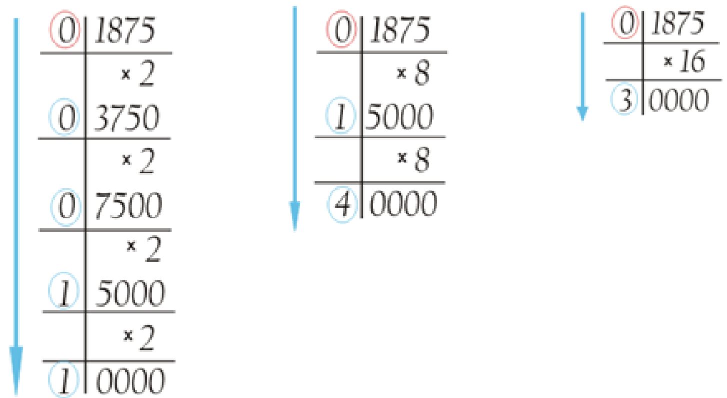
Правило № 3. Перевод дробных чисел десятичной системы счисления в *P*-ичную.

Для перевода дробного числа из десятичной системы счисления в *P*-ичную необходимо:

1. последовательно умножать дробное десятичное число и получаемые дробные части произведений на основание новой системы счисления до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равной нулю или не будет достигнута требуемая точность представления числа в новой системе счисления;
2. полученные целые части произведений, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления;
3. составить дробную часть числа в новой системе счисления, начиная с целой части первого произведения.

Примеры:

$0{,}1875_{10}=0{,}0011_2$; $0{,}1875_{10}=0{,}14_8$; $0{,}1875_{10}=0{,}3_{16}$.



Правило № 4. Перевод двоичных чисел в восьмеричную систему счисления.

Для перевода двоичного числа в восьмеричную систему счисления необходимо:

1. разбить двоичное число на триады (тройки цифр), начиная с младшего разряда (для целых чисел) или старшего разряда (для дробных чисел);
2. в случае необходимости дополнить старшую триаду (для целых чисел) или младшую триаду (для дробных чисел) нулями;
3. каждую триаду заменить соответствующей восьмеричной цифрой.

Пример:

$1001011{,}1101_2 = \underline{00}1\ 001\ 011{,}110\ 1\underline{00}_2 = 113{,}64_8$.

Правило № 5. Перевод двоичных чисел в шестнадцатеричную систему счисления.

Для перевода двоичного числа в шестнадцатеричную систему счисления необходимо:

1. разбить двоичное число на тетрады (четверки цифр), начиная с младшего разряда (для целых чисел) или старшего разряда (для дробных чисел);
2. в случае необходимости дополнить старшую тетраду (для целых чисел) или младшую тетраду (для дробных чисел) нулями;
3. каждую тетраду заменить соответствующей шестнадцатеричной цифрой.

Пример:

$1001011{,}110\ 1_2 = \underline{0}100\ 1011{,}1100\ 1\underline{000}_2 = 4B{,}C8_8$.

Правило № 6. Перевод восьмеричных и шестнадцатеричных чисел в двоичную систему счисления.

Для перевода восьмеричного (шестнадцатеричного) числа в двоичную систему счисления необходимо каждую цифру исходного числа заменить эквивалентной ей триадой (тетрадой).

Примеры:

$531{,}2_8 = 101\ 011\ 001{,}010_2$;

$E18{,}F_8 = 1110\ 0001\ 1000{,}1111_2$.

Правило № 7. Перевод восьмеричных чисел в шестнадцатеричную систему счисления и обратно.

Для перевода восьмеричного числа в шестнадцатеричную систему счисления необходимо выполнить промежуточный перевод в двоичную систему счисления.

Примеры:

$531{,}2_8 = 101\ 011\ 001{,}010_2 = 0001\ 0101\ 1001{,}0100_2 = 159{,}4_{16}$;

$E18{,}F_8 = 1110\ 0001\ 1000{,}1111_2 = 111\ 000\ 011\ 000{,}111\ 100_2 = 7030{,}74_8$.