

# ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

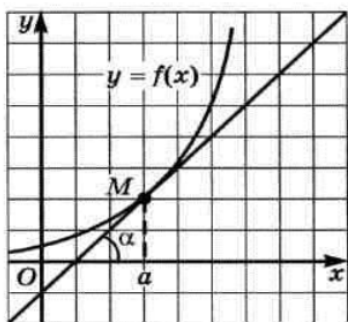
дата 21.11.2024

Тема: «Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Физический смысл производной»

Новый материал (конспект в тетрадь)

## 1. Геометрический смысл производной

Производная функции  $y=f(x)$ , вычисленная при заданном значении  $x_0$ , равна тангенсу угла, образованного положительным направлением оси Ох касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой  $x_0$ :  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$



### Замечание

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной ( $k$ ) к графику функции  $y=f(x)$  в точке  $x_0$ .

Любая касательная является функцией линейной и имеет вид  $y=kx+b$ , где  $k$  — угловой коэффициент касательной.

Значит, справедлива формула

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = k$$

## 2. Уравнение касательной

Уравнение касательной к графику функции  $y=f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

### Алгоритм составления уравнения касательной

1. Вычислить  $f(x_0)$
2. Найти  $f'(x)$  и вычислить  $f'(x_0)$
3. Подставить найденные числа  $x_0$ ,  $f(x_0)$  и  $f'(x_0)$  в формулу  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

**Пример:** дана функция  $y = x^3$ . Составить уравнение касательной к графику этой функции в точке  $x_0 = 2$ .

1. Для начала найдем значение функции:  $f(x_0) = f(2) = 2^3 = 8$ ;

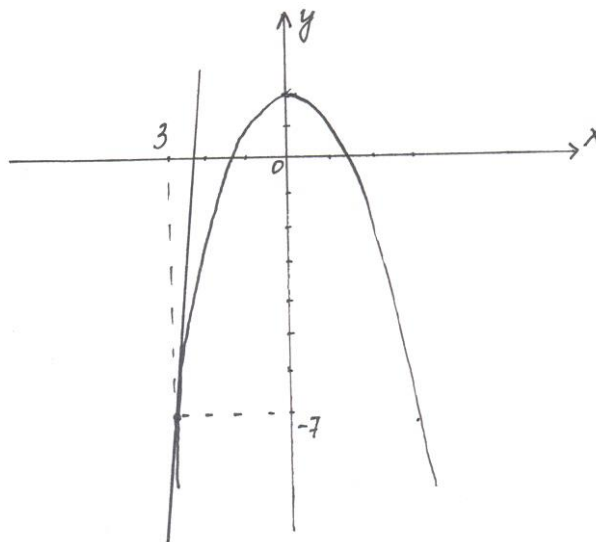
2. Теперь найдем производную:  $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$ ;

Подставляем в производную  $x_0 = 2$ :  $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ ;

3. Подставим найденные числа в формулу:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$





Мы видим, что функции и прямая, уравнение которой мы получим, имеют одну общую точку А, у которой абсцисса  $x_0 = -3$ .

### 3. Физический смысл производной

**Физический смысл производной** заключается в том, что производная выражает скорость протекания процесса, описываемого зависимостью  $y = f(x)$ :

- если это движение автомобиля, то, принимая в качестве функции зависимость пройденного расстояния от времени, с помощью производной получается зависимость скорости от времени;

- если же рассмотреть в качестве функции мгновенную скорость автомобиля, то производная задает изменение его ускорения;

- если рассмотреть функцию, задающую зависимость объема произведенной продукции от времени, то производная позволит узнать, как изменялась со временем производительность труда на этом предприятии;

- если рассматриваются электромагнитные волны, то могут потребоваться функции, характеризующие изменение со временем электрического и магнитного полей, а также их производные - скорости изменения этих полей, ведь величина магнитного поля пропорциональна скорости изменения электрического поля и т.п.

Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени  $t$  есть производная от пути  $S$  по времени  $t$ :

$$v(t) = S'(t),$$

а ускорение – производная скорости по времени:

$$a(t) = v'(t)$$

**Если функция  $y = f(x)$  описывает какой-либо физический процесс, то производная  $y'$  есть скорость протекания этого процесса. В этом заключается механический смысл производной.**

### Примеры:

1. Закон движения тела задан формулой  $S(t)=0,5t^2 + 3t + 2$  ( $S$  - в метрах,  $t$  - в секундах). Какой путь пройден телом за 4 секунды? Какова скорость движения в этот момент времени?

Решение:

$$S(4)=0,5 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 2 = 8+12+2=22 \text{ (м)}$$

$$v(t)=(0,5t^2 + 3t + 2)'=t+3 \text{ (м/с)}$$

$$v(4)=4+3=7 \text{ (м/с)}$$

Ответ: 7 м/с

2. Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию, задаётся зависимостью  $p(t) = t^2/2 + 3t - 3$  (моль). Найти скорость химической реакции через 3 секунды.

Решение:

$$v(t) = p'(t) = t + 3 \text{ (моль/с)}$$

$$v(3) = 3 + 3 = 6 \text{ (моль/с)}$$

Ответ: 6 моль/с

3. Точка движется прямолинейно по закону  $s=2t^3 + 6t^2 - t$  ( $t$  - выражается в секундах,  $s$  - выражается в метрах). Найти скорость и ускорение движения через 2с. после начала движения.

Решение:

$$v(t) = s' = 6t^2 + 12t - 1$$

$$v(2) = 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 1 = 24+24-1 = 47 \text{ м/с}$$

$$a = v' = 12t + 12$$

$$a(2) = 12 \cdot 2 + 12 = 36 \text{ м/с}^2$$

4. Точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = 2t^3 + 3t + 1$ .

Найти ускорение в момент времени  $t = 3$  сек. (расстояние  $x(t)$  измеряется в см, время в сек.).

Решение:

$$1) v(t) = x'(t) = (2t^3 + 3t + 1)' = 2 \cdot 3t^2 + 3 \cdot 1 + 0 = 6t^2 + 3$$

$$2) a(t) = v'(t) = (6t^2 + 3)' = 6 \cdot 2t + 0 = 12t$$

$$3) a(3) = 12 \cdot 3 = 36 \text{ (м/сек}^2\text{)}$$

5. Вращение тела вокруг оси совершается по закону  $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$ . Найти угловую скорость  $\omega(t)$  в произвольный момент времени  $t$  и при  $t = 4$  сек.

Решение:

$$1) \omega(t) = \varphi'(t) = (3t^2 - 4t + 2)' = 3 \cdot 2t - 4 \cdot 1 + 0 = 6t - 4;$$

$$\omega(t) = 6t - 4.$$

$$2) \omega(4) = 6 \cdot 4 - 4 = 24 - 4 = 20 \text{ (рад/сек)}$$

Ответ: 20 (рад/сек).

### Домашнее задание

Проработать конспект по тетради

Конспект отправляем на электронную почту [oles.udalova@yandex.ru](mailto:oles.udalova@yandex.ru)