

ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 26.11.2024

Новый материал (конспект в рабочую тетрадь)

Тема: «Нахождение погрешности результата численного решения задач»

Основные понятия

1 *Приближенным числом a* называется число, незначительно отличающееся от точного числа A и заменяющее последнее в вычислениях

2 Под абсолютной погрешностью Δ приближенного числа a понимается разность $\Delta = |A - a|$, отсюда следует, что A заключено в пределах $a - \Delta \leq A \leq a + \Delta$ или $A = a \pm \Delta$

3 Относительной погрешностью δ приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности Δ этого числа к модулю соответствующего точного числа $\delta = \frac{\Delta}{|A|}$.

Так как A обычно неизвестно, то на практике применяют оценку $\delta = \frac{\Delta}{|a|}$

4 *Значащей цифрой* приближенного числа a называется всякая цифра в его десятичном представлении, отличная от нуля, и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда

5 n первых значащих цифр приближенного числа a являются *верными*, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины разряда, выражаемого n – й значащей цифрой, считая слева направо. Цифры, не являющиеся верными, называются *сомнительными*

6 Если положительное приближенное число a имеет относительную погрешность δ , то количество верных знаков n данного числа можно определить по формуле $N = 1 - \lg(a_m \delta)$, где a_m – старший десятичный разряд, и в качестве n взять ближайшее к N число.

7 Погрешности арифметических действий

$$\Delta(a + b) = \Delta(a - b) = \Delta(a) + \Delta(b)$$

$$\delta(a \times b) = \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b)$$

$$\delta(a^m) = m \times \delta(a)$$

Задание

1 При численном интегрировании было получено значение определенного интеграла:

$$a = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,719. \text{ Найдите абсолютную и относительную погрешности этого приближения.}$$

Решение:

а) найдем значение заданного интеграла с помощью непосредственного интегрирования:

$$y = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2 \approx 0,693$$

б) абсолютная погрешность: $\Delta = |y - a| = 0,719 - 0,693 = 0,026$

в) относительная погрешность: $\delta = \frac{\Delta}{|a|} \cdot 100 = \frac{0,026}{0,719} \cdot 100 \approx 3,6\%$

Задание

Округлите сомнительные цифры приближенного числа x с относительной погрешностью δ , оставив в его записи только верные цифры: $x=42,221$; $\delta=0,5\%$

Решение:

а) Найдем количество верных цифр числа x : $n = 1 - \lg(4 \cdot 0,005) \approx 2,699 = 3$

б) Округляем x до трех цифр $x = 42,2$

Задание

Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $x = 42,22 \pm 0,001$ и $y = 1,35 \pm 0,002$

Решение:

а) $x + y = 42,22 + 1,35 \pm (0,001 + 0,002) = 43,57 \pm 0,003$;

б) $x - y = 42,22 - 1,35 \pm (0,001 + 0,002) = 40,87 \pm 0,003$;

в) найдем относительную погрешность x и y :

$$\delta_x = \frac{0,001}{42,22} \approx 0,00002; \quad \delta_y = \frac{0,002}{1,35} \approx 0,00148;$$

тогда $\delta = \delta_x + \delta_y = 0,00002 + 0,00148 = 0,0015$;

$$x \cdot y = 42,22 \cdot 1,35 \pm \Delta = 56,997 \pm \Delta; \quad \Delta = x \cdot y \cdot \delta \approx 0,085$$

$$x \cdot y = 42,22 \cdot 1,35 \pm 0,085$$

$$\frac{x}{y} = \frac{42,22}{1,35} \pm \Delta = 31,274 \pm \Delta; \quad \Delta = \frac{x}{y} \cdot \delta \approx 0,047$$

$$\frac{x}{y} = 31,274 \pm 0,047$$