

ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 21.11.24

Новый материал (конспект в тетрадь)

Тема: «Синус, косинус и тангенс двойного угла.
Формулы половинного угла»

1. Синус двойного аргумента

Определение: Синус двойного аргумента равен удвоенному произведению синуса и косинуса данного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Пример. Вычислите:

$$\sin 2\alpha, \text{ если } \sin \alpha = -0,6; \quad 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

Решение:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Из основного тригонометрического тождества $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ находим $\cos \alpha$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(-0,6)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

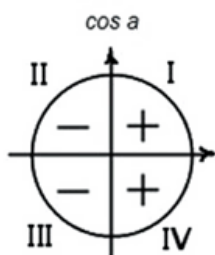
$$0,36 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 0,36$$

$$\cos^2 \alpha = 0,64$$

$$\cos \alpha = \pm 0,8$$

Так как по условию $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, то α - принадлежит III четверти.



Поэтому $\cos \alpha = -0,8$

$$\text{Итак, } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot (-0,6) \cdot (-0,8) = 0,96$$

Пример. Вычислите:

$$(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$$

Решение:

$$(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2 = \cos^2 75^\circ - 2 \cos 75^\circ \sin 75^\circ + \sin^2 75^\circ = 1 - \sin 150^\circ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Косинус двойного аргумента

Определение: Косинус двойного аргумента равен разности квадратов косинуса и синуса данного аргумента.

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

Пример. Вычислите:

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$$

Решение:

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Пример. Вычислите:

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$$

Решение:

$$\begin{aligned}\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha &= (\cos^2 \alpha)^2 - (\sin^2 \alpha)^2 = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cdot 1 = \cos 2\alpha\end{aligned}$$

3. Тангенс двойного аргумента

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Пример. Вычислите:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$$

Решение:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} = \operatorname{tg} \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

Пример. Вычислите:

$$\frac{6 \operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}$$

Решение:

$$\frac{6 \operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ} = 3 \operatorname{tg} (2 \cdot 75^\circ) = 3 \operatorname{tg} 150^\circ = 3 \operatorname{tg} (180^\circ - 30^\circ) = -3 \operatorname{tg} 30^\circ = -\sqrt{3}$$

4. Формулы половинного угла

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \text{формула синуса половинного аргумента}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha + 1}{2} \quad \text{формула косинуса половинного угла}$$

Так как тангенс — это отношение синуса на косинус, то формула **косинуса половинного угла**

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Так как котангенс — это число, взаимнообратное тангенсу, то

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

5. Решение задач

Пример. Вычислите:

$$\sqrt{32} \cos^2 \frac{3\pi}{8} - \sqrt{32} \sin^2 \frac{3\pi}{8}$$

Решение:

Вынесем за скобку общий множитель и применим формулу косинуса двойного аргумента:

$$\begin{aligned} \sqrt{32} \cos^2 \frac{3\pi}{8} - \sqrt{32} \sin^2 \frac{3\pi}{8} &= \sqrt{32} \left(\cos^2 \frac{3\pi}{8} - \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) = \\ &= \sqrt{32} \left(\cos^2 \frac{3\pi}{8} - \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) = \sqrt{32} \cos \left(2 \cdot \frac{3\pi}{8} \right) = \sqrt{32} \cos \frac{3\pi}{4} = \\ &= -\sqrt{32} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{64}}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \end{aligned}$$

Пример. Найдите значение выражения

$$14 \sin 135^\circ \cdot \cos 135^\circ$$

Решение:

Применяем формулу синуса двойного аргумента:

$$14 \sin 135^\circ \cdot \cos 135^\circ = 7 \cdot 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos 135^\circ =$$

$$7 \cdot \sin(2 \cdot 135^\circ) = 7 \cdot \sin 270^\circ = 7 \cdot (-1) = -7$$

Пример. Вычислите:

$$\sqrt{8} - \sqrt{32} \sin^2 \frac{11\pi}{8}$$

Решение:

Выделим общий множитель и вынесем его за скобку, затем применим формулу косинуса двойного аргумента:

$$\begin{aligned}\sqrt{8} - \sqrt{32} \sin^2 \frac{11\pi}{8} &= \sqrt{8} \left(1 - \sqrt{4} \sin^2 \frac{11\pi}{8}\right) = \sqrt{8} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{11\pi}{8}\right) = \\ &= \sqrt{8} \cos \left(2 \cdot \frac{11\pi}{8}\right) = \sqrt{8} \cos \frac{11\pi}{4}\end{aligned}$$

Далее выделим период и применим формулу приведения:

$$\begin{aligned}\sqrt{8} \cos \left(\frac{12\pi - \pi}{4}\right) &= \sqrt{8} \cos \left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{8} \cos \left(2\pi + \pi - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \sqrt{8} \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{8} \left(-\cos \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{8} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{16}}{2} = -2\end{aligned}$$

Пример. Известно, что $\cos \alpha = 0,4$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите $\sin \frac{\alpha}{2}$; $\cos \frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Решение:

1) $\sin \frac{\alpha}{2}$ найдём по формуле: $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - 0,4}{2} = 0,3$; $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{0,3}$.

По условию $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Разделив обе части неравенства на 2, получаем $\frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$,

значит угол $\frac{\alpha}{2}$ во второй четверти, здесь синус положительный $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,3}$.

2) $\cos \frac{\alpha}{2}$; найдём по формуле $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha + 1}{2} = \frac{0,4 + 1}{2} = 0,75$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{0,75} = \pm 0,5\sqrt{3}$$

Мы уже выяснили, что угол $\frac{\alpha}{2}$ во второй четверти, косинус отрицательный. $\cos \frac{\alpha}{2} = -0,5\sqrt{3}$.

3) Так как тангенс — это отношение синуса на косинус, то

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{0,3}}{-0,5\sqrt{3}} = -2\sqrt{0,1}.$$

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru