

16.09.23

Тема: Системы тригонометрических уравнений

СРОК СДАЧИ РАБОТЫ: 17.11.2023

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Основными методами решения систем уравнений являются:

- метод подстановки
- метод замены переменной.

Также при решении систем тригонометрических уравнений используются многие тригонометрические формулы.

Рассмотрим решение систем тригонометрических уравнений.

Пример 1.

$$\begin{cases} \sin x \cos y = 0,25\sqrt{3} \\ \cos \cos(x+y) \cos \cos(x-y) = 0,5 \end{cases}$$

Решение:

При решении этой системы можно действовать по-разному:

- 1) можно использовать формулы преобразования произведения в сумму синусов (в первом уравнении) или косинусов (во втором уравнении)
- 2) можно использовать формулами косинуса суммы и разности во втором уравнении.

Воспользуемся формулой преобразования произведения косинусов в сумму косинусов:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = 0,25\sqrt{3} \\ \cos \cos 2x + \cos \cos 2y = 1 \end{cases}$$

Теперь, учитывая, что косинус двойного аргумента может быть выражен через квадрат синуса и косинуса аргумента, возведем в квадрат первое уравнение. Но, так как возведение в квадрат не является равносильным преобразованием, введем ограничение:

$\sin x \cos y > 0$, то есть $\sin x$ и $\cos y$ должны быть одного знака.

$$\begin{cases} \sin^2 x \cos^2 y = \frac{3}{16} \\ 1 - 2\sin^2 x + 2\cos^2 y - 1 = 1 \end{cases}$$

Теперь введем новые переменные:

$$\begin{cases} a = \sin^2 x \\ b = \cos^2 y \end{cases}, a > 0, b > 0 (*) \text{ и решим вспомогательную систему:}$$

$$\begin{cases} ab = \frac{3}{16} \\ -2a + 2b = 1. \end{cases}$$

Решим ее методом подстановки.

$$\begin{cases} b = a + \frac{1}{2} \\ a\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16} \end{cases} (**)$$

Решим уравнение (**).

$$a\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}$$

$$16a^2 + 8a - 3 = 0$$

$$\left[a = \frac{1}{4} \quad a = -\frac{3}{4} \right] \text{ не удовлетворяет (**)}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ . Вернемся к исходным переменным.}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{4} \\ \cos^2 y = \frac{3}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \pm \frac{1}{2} \\ \cos y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

С учетом условия $\sin x \cos y > 0$ получим две системы:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, n, k \in Z \text{ ИЛИ}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n \\ y = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, n, k \in Z$$

Ответ: $\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, n, k \in Z$

ИЛИ $\begin{cases} x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n \\ y = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, n, k \in Z$

Пример 2.

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{1}{\sin x} \\ \cos x - \cos y = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Решение:

С учетом области определения уравнений ($\sin x \cos x \neq 0$) преобразуем каждое уравнение:

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin y \sin x = 1 \\ \cos^2 x - \cos y \cos x = 1 \end{cases} .$$

Теперь сложим эти уравнение, оставив в системе, например, первое уравнение:

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin y \sin x = 1 \\ \cos^2 x + \sin^2 x - \cos y \cos x - \sin y \sin x = 2 \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin y \sin x = 1 \\ \cos(y - x) = -1 \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin y \sin x = 1 \\ y - x = \pi + 2\pi k, \quad k \in Z \end{cases} .$$

Теперь выразим из второго уравнения y :

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin y \sin x = 1 \\ y = x + \pi + 2\pi k \end{cases}, k \in Z ,$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin(x + \pi + 2\pi k)\sin x = 1 \\ y = x + \pi + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin(x + \pi)\sin x = 1 \\ y = x + \pi + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$

$$\begin{cases} 2\sin^2 x = 1 \\ y = x + \pi + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$

$$\begin{cases} \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = x + \pi + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \\ y = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \\ y = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n + 4k) \end{cases}, k, n \in Z$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \\ y = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n + 4k) \end{cases}, k, n \in Z$$

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1.

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$$

Решение:

Введем новые переменные: $\begin{cases} \cos x = a \\ \sin y = b \end{cases}$.

Тогда вспомогательная система будет иметь вид:

$$\begin{cases} 4b - 6\sqrt{2}a = 5 + 4(1 - b^2) \\ 2a^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b^2 + 4b - 6\sqrt{2}a - 9 = 0 \\ 2a^2 - 1 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 4b^2 + 4b - 6 - 9 = 0 \\ a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 4b^2 + 4b - 3 = 0 \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 4b^2 + 4b - 15 = 0 \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Получаем четыре пары решений для вспомогательной системы:

$$\begin{cases} b = 0,5 \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \begin{cases} b = -1,5 \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \begin{cases} b = 2,5 \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \begin{cases} b = 1,5 \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Так как $\begin{cases} a = \cos x \\ b = \sin y \end{cases}$, то решение имеет только первая система: $\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin y = 0,5 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases}, k, n \in Z$$

Пример 2.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x + y = 5 \\ 4y + 2\sin x = 19 \end{cases}$.

Решение:

Пусть $\sin x = t$.

Система примет вид: $\begin{cases} t + y = 5 \\ 4y + 2t = 19 \end{cases}$, то есть мы получили простую линейную систему.

Ее можно решить методом подстановки или методом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} t = 5 - y \\ 4y + 2(5 - y) = 19 \end{cases},$$

$$\begin{cases} t = 5 - y \\ 2y = 9 \end{cases},$$

$$\begin{cases} t = 0,5 \\ y = 4,5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \sin x = 0,5 \\ y = 4,5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, & n \in Z \\ y = 4,5 \end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, & n \in Z \\ y = 4,5 \end{cases} .$

Домашнее задание №175,а) б)